Correction DM n°9

① 1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x)$$

f est une fonction paire

2) f est dérivable en tant que quotient et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = -\dfrac{x}{(\sqrt{1+x^2})^2\sqrt{1+x^2}}$

pour $x \in [0;+\infty[$,

$-x < 0$
$\sqrt{1+x^2} > 0$
$1+x^2 > 0$

donc $f'(x) < 0$ et la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = +\infty$
$\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$

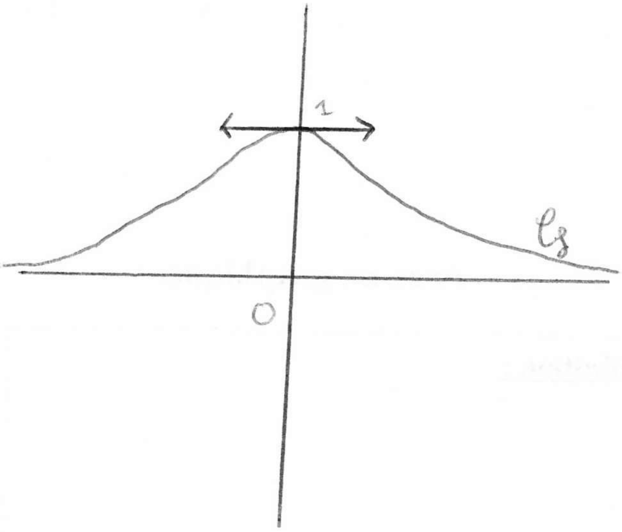
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

4) $f(0) = 1$. On a $f([0;+\infty[) =]0;1]$

(D'après le tableau de variation ou en disant que $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et f est décroissante.)

Comme f est paire, f est bornée sur $\mathbb{R}$

5)



6)

x	0		$+\infty$
variat° de f	1	$\searrow$	0

- f est décroissante strictement
- $f([0;+\infty[) =]0;1]$.
- f est continue (car dérivable cf 2).

Donc d'après le théorème de bijection,
f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]0;1]$

7) Soit $y \in]0,1]$

On résout $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \qquad (y \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \; > 0 \quad (\text{car } y \in]0;1[).$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

Donc l'unique réel positif x est $\sqrt{\dfrac{1-y^2}{y^2}}$

8) $f^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & [0;+\infty[\\ y & \longmapsto & \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} \end{array}$

② 1) On étudie $g : x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{g(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

→ Cette méthode ne fonctionne pas.

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\quad x^2 + 1 > x^2$

$$\sqrt{x^2+1} > |x|$$

si $x > 0$, $x + |x| > 0$

si $x < 0$, $x + |x| = 0$.

donc $g(x) > x + |x|$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_F = \mathbb{R}}$

2) F est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables :

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$
$$F'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{g(x)}{g(x) \times \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3) $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$,
$$F(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right)$$
$$= \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1 + x^2 - x^2}{x + \sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$$\boxed{F(-x) = -F(x).}$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} = +\infty$

et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

Par symétrie $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty}$

5) $$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_\lambda^{2\lambda}$$

$$= F(2\lambda) - F(\lambda)$$

$$= \ln\left(2\lambda + \sqrt{1+4\lambda^2}\right) - \ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2\lambda+\sqrt{1+4\lambda^2}}{\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)$$

Or $\overset{\lambda>0}{}$ $2\lambda + \sqrt{1+4\lambda^2} = 2\lambda + 2\lambda\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}} = 2\lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}}\right)$

$\lambda + \sqrt{1+\lambda^2} = \lambda\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)$

donc $$\mathcal{A}(\lambda) = \ln\left(2\times\frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right)}\right)$$

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \ln(2)}$$

3) 1) $u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = [F(x)]_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1)$

$$\boxed{u_0 = \ln(1+\sqrt{2})}$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2} - 1}$$

2) $u_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad v = x^2$

$u = \sqrt{1+x^2}$ $\quad v' = 2x$

$$= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2} dx.$$

$$= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2} + \frac{2}{3}$$

$$\boxed{u_3 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}}$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$ $\quad x^{n+1} < x^n$

$$\Rightarrow x^{n+1} f(x) < x^n f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n f(x)\,dx.$$

$$u_{n+1} < u_n.$$

La suite (u_n) est décroissante.

$\forall x \in [0,1]$, $\quad x^n f(x) > 0$ donc $\int_0^1 x^n f(x)\,dx > 0$.

$\boxed{u_n > 0}$.

(u_n) est décroissante et positif (minorée) donc (u_n) est convergente.

5) On a déjà montrer que : $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \forall x \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$.

De plus

$$\sqrt{1+x^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

On a alors

$$0 \leq \frac{x_n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$$0 \leq u_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$$

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc par le théorème des gendarmes

On conclut $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice Bonus

1) On a $f_p(t) = \frac{t^{x+p}}{1+t} = \frac{e^{(x+p)\ln(t)}}{1+t}$

$\forall\, t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0;1]$

$t \longmapsto 1+t$ est continue sur $]0;1]$ et ne s'annule pas

$t \longmapsto t^{x+p}$ est continue sur $]0;1]$ en tant que composée de fonctions continues

$f_p(t)$ est continue sur $]0;1]$

On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{t \to 0} t^{x+p} = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} 1+t = 1$

$x+p > 0$ et

donc $\lim\limits_{t \to 0} f_p(t) = 0$

f est donc continue sur $[0,1]$

Donc $\boxed{I_p(x) \text{ existe}}$

2) $$(1+t)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k t^k$$

$$= 1 - (-1)^{n+1} t^{n+1}$$

donc $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}.$$

3) D'après 2)

$$\frac{t^x}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{x+k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{x+n+1}}{1+t}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{x+k} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{x+k} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt.$$

et $\displaystyle\int_0^1 t^{x+k} dt = \left[\frac{1}{x+k+1} t^{x+k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+k+1}$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{x+n+1}}{1+t}$

$$= S_n(x) + R_n(x)$$

4) On a $\forall t \in [0,1]$ $\quad \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+x+1} dt$$

$$\leq \left[\frac{1}{n+x+2} t^{n+x+2}\right]_0^1$$

$$\leq \frac{1}{n+x+2}$$

Or $x > 0$ donc $n+x+2 \geq n+2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+x+2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

En conclusion

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+2}$$

D'après le théorème des gendarmes et la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,dx$.

6) $\displaystyle S(1/2) = \int_0^1 \frac{t^{1/2}}{1+t}\,dt$ $\qquad u = \sqrt{t}$, $\quad du = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

$$= \int_0^1 \frac{u \times 2u}{1+u^2}\,du$$

$$= \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2}\,du.$$

$$= 2\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

On a $\displaystyle\frac{u^2}{1+u^2} = \frac{u^2+1-1}{1+u^2} = 1 - \frac{1}{1+u^2}$

$$= 2\left(\int_0^1 du - \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}.}$$

7) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^k}{k+1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1/2} + \frac{1}{1/2}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+3/2} + 1.$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+3/2}}_{= S_{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)} + 1$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = S(1/2)$.

donc $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = -\frac{1}{2}S(1/2) + 1 \boxed{= \frac{\pi}{4}}.$$